۱- اگر $x_0=5$ و $x_n=3x_{n-1}$ به پیمانه ۱۵۰ باشد $x_1,\ldots,x_{10}$ را پیدا کنید. $(x_n \overset{150}{\equiv} 3x_{n-1})$

$x_0=5 \qquad x_1\to 3\times 5=15 \qquad x_2\to 3\times 15=45 \qquad x_3\to 3\times 45=135$

$x_4\to 3\times 135=405 \overset{150}{\equiv} 105 \qquad x_5\to 3\times 105=315 \overset{150}{\equiv} 15 \qquad x_6\to 3\times 15=45$

$x_7\to 3\times 45=135 \qquad x_8\to 3\times 135=405 \overset{150}{\equiv} 105 \qquad x_9\to 3\times 105=315 \overset{150}{\equiv} 15$

$x_{10}\to 3\times 15=45 \qquad (\underline{5,15,45,135,105},15,45,135,105,15,45)$

الگوریتم زمانی پایان می‌یابد که مقدار تولید شده درمر حله خاصی برابر یکی از مقادیر تولید شده قبلی باشد $(x_5=x_1)$ علت قطع الگوریتم در چنین مرحله‌ای این است که در صورت ادامه همان مقادیر قبلی مجدداً تولید می‌شود. بعد از مقدار x_4 تکرار بوجود می‌آید بنابراین مقدار $x_1,\ldots,x_4$ برای تولید اعداد شبه‌تصادفی کافی است.

حال با تقسیم x_n بر m اعداد شبه تصادفی در دامنه (۰,۱) تولید می‌شود: (۰/۷، ۰/۹، ۰/۳، ۰/۱، ۰,۰۳۳)

$x_0\to\frac{5}{150}=\frac{1}{30}=0.033 \qquad x_1\to\frac{15}{150}=\frac{1}{10} \qquad x_2\to\frac{45}{150}=\frac{3}{10} \qquad x_3\to\frac{135}{150}=\frac{9}{10} \qquad x_4\to\frac{105}{150}=\frac{7}{10}$

```
a <- 3
m <- 150
x <- 5
repeat {
   y <- (a * x[length(x)]) %% m
   if(sum(x == y) > 0)     break
   x <- c(x, y)}
x
[1]   5  15  45 135 105
x/m
[1] 0.03333333 0.10000000 0.30000000 0.90000000 0.70000000
```

۲- اگر $x_0=3$ و $x_n=5x_{n-1}+7$ به پیمانه ۲۰۰ باشد $x_1,\ldots,x_{10}$ را پیدا کنید. $(x_n \overset{200}{\equiv} 5x_{n-1}+7)$

$x_0=3 \quad x_1\to(5\times 3)+7=22 \qquad x_2\to(5\times 22)+7=117 \qquad x_3\to(5\times 117)+7=592 \overset{200}{\equiv} 192$

$x_4\to(5\times 192)+7=967 \overset{200}{\equiv} 167 \qquad x_5\to(5\times 167)+7=842 \overset{200}{\equiv} 42$

$x_6\to(5\times 42)+7=217 \overset{200}{\equiv} 17 \qquad x_7\to(5\times 17)+7=92 \qquad x_8\to(5\times 92)+7=467 \overset{200}{\equiv} 67$

$x_9\to(5\times 67)+7=342 \overset{200}{\equiv} 142 \qquad x_{10}\to(5\times 42)+7=217 \overset{200}{\equiv} 17 \qquad (\underline{3,22,117,192,167,42,17,92,67,142},17)$

مقدار x_8 تکرار بوجود می آید بنابراین مقدار $x_1,\ldots,x_8$ برای تولید اعداد شبه تصادفی کافی است. حال با تقسیم x_n بر m اعداد شبه تصادفی در دامنه (۰,۱) تولید می شود: (۰/۰۸۵، ۰/۲۱، ۰/۳۳۵، ۰/۴۶، ۰/۰۸۵، ۰/۲۱،۰/۸۳۵، ۰/۹۶، ۰/۵۸۵، ۰/۱۱،۰/۰۱۵،۰)

$x_0\to\frac{3}{200}=\frac{15}{1000} \qquad x_1\to\frac{22}{200}=\frac{11}{100} \qquad x_2\to\frac{117}{200}=\frac{585}{1000} \qquad x_3\to\frac{192}{200}=\frac{96}{100}$

$x_4\to\frac{167}{200}=\frac{835}{1000} \qquad x_5\to\frac{42}{200}=\frac{21}{100} \qquad x_6\to\frac{17}{200}=\frac{85}{1000} \qquad x_7\to\frac{92}{200}=\frac{46}{100}$

$x_8\to\frac{67}{200}=\frac{335}{1000}$

```
a <- 5
m <- 200
x <- 3
c <- 7
repeat {
   y <- ((a * x[length(x)]) + c) %% m
   if(sum(x == y) > 0)     break
   x <- c(x, y)}
x
 [1]   3  22 117 192 167  42  17  92  67 142
x/m
[1] 0.015 0.110 0.585 0.960 0.835 0.210 0.085 0.460 0.335 0.710
```

3- $\int_0^1 \exp(e^x)dx = \int_0^1 \exp(e^x) \times 1dx = E(\exp(e^x))$

```
set.seed(4)
n <- 1000
x <- runif(n,0,1)
A <- mean(exp(exp(x)))
A
[1] 6.369767
```

4- $\int_0^5 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 5\int_0^5 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{5} dx = 5E[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]$

set.seed(4) n <- 1000 x <- runif(n,0,5) B <- 5 * mean(((1 - x^2)^3)^(1/2)) B [1] NA	set.seed(4) n <- 1000 x <- runif(n,0,5) B <- 5 * mean(((1 - x^2)^2)^(1/3)) B [1] 17.24073

5- $\int_{-5}^{5} e^{x+x^2} dx = 10\int_{-5}^{5} (e^{x+x^2}) \times \frac{1}{10} = 10E(e^{x+x^2})$

```
set.seed(4)
n <- 1000
x <- runif(n, -5, 5)
D <- 10 * mean(exp((x + (x^2))))
D
[1] 845593309321
```

6- $\int_0^\infty x(1+x)^{-2} dx = \int_0^\infty \frac{x(1+x)^{-2}}{e^{-x}} \times e^{-x} dx = E(\frac{x(1+x)^{-2}}{e^{-x}}) = E(\frac{xe^x}{(1+x)^2})$

```
set.seed(4)
n <- 1000
x <- rexp(n, 1)
E <- mean((x * exp(x))/(1 + x)^2)
E <- mean((x * (1 + x)^(-2)/exp(-x))
E
[1] 1.24903
```

7- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \times e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} E(e^{\frac{-x^2}{2}})$

```
set.seed(4)
n <- 1000
x <- rnorm(n, 0, 1)
G <- sqrt(2 * pi) * mean(exp((-1/2) * (x^2)))
G
[1] 1.776962
```

8- $\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dydx = \int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} \times 1 \times 1dydx = E(f(x,y)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)$

```
set.seed(4)
n <- 1000
x <- runif(n)
y <- runif(n)
H <- mean(exp((x + y)^2))
H
[1] 4.907149
```

راهنمایی: فرض کنید $I_y(x)=\begin{cases}1 & y<x\\ 0 & y\geq x\end{cases}$ و از این تابع استفاده نمایید.

$$9\text{-}\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-(x+y)}dydx=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} I_{(0,x]}(y).e^{-y}e^{-x}dydx=e=E(I_{(0,x]})$$

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases} \qquad I_{(0,x)}(y)=\begin{cases}1 & 0<y<x\\ 0 & o.w\end{cases}$$

```
set.seed(4)
> n <- 1000
> x <- rexp(n, 1)
> y <- rexp(n, 1)
> I <- mean(y < x)
> I
[1] 0.497
```